ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συναρτηση f ορισμενη σε ένα διαστημα Δ Αν

- η f ειναι συνεχης στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για καθε *εσωτερικο* σημειο x του Δ,

τοτε η f ειναι σταθερη σε ολο το διαστημα Δ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκει να αποδειξουμε οτι για οποιαδηποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχυει $f(x_1) = f(x_2)$ Πραγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τοτε προφανως $f(x_1) = f(x_2)$
- Αν $x_1 < x_2$, τοτε στο διαστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιει τις υποθεσεις του θεωρηματος μέσης τιμης Επομενως, υπαρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τετοιο, ωστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδη το ξ ειναι εσωτερικο σημειο του Δ, ισχυει $f'(\xi) = 0$, οποτε, λογω της (1), ειναι $f(x_1) = f(x_2)$ Αν $x_2 < x_1$, τοτε ομοιως αποδεικνυεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$ Σε ολες, λοιπον, τις περιπτωσεις ειναι $f(x_1) = f(x_2)$ ■

Α2

Έστω οι συναρτησεις f, g, h Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντα στο x_0 και
- $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τοτε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Α3

Εστω f μια συναρτηση ορισμενη σε ενα διαστημα Δ **Αρχικη συνάρτηση** η **παράγουσα της f στο Δ**'' ονομαζεται καθε συναρτηση F που ειναι παραγωγισιμη στο Δ και ισχυει

$$F'(x) = f(x), \text{ για καθε } x \in \Delta$$

Α4

α -> ΛΑΘΟΣ

β -> ΣΩΣΤΟ

γ -> ΣΩΣΤΟ

δ -> ΣΩΣΤΟ

ε -> ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=2\ln(x-1)$ $\qquad$ $g(x)=\sqrt{x-2}+1$

Β1 $D_f=(1,+\infty)$ $\qquad$ $D_g=[2,+\infty)$

πρέπει $x\in D_g$ και $g(x)\in D_f$

$x\in[2,+\infty)$ $\qquad$ $\sqrt{x-2}+1\in(1,+\infty)$

$\sqrt{x-2}+1>1$

$\sqrt{x-2}>0$

$x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

άρα $\boxed{D_{f\circ g}=(2,+\infty)}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\ln(g(x)-1)=2\ln(\sqrt{x-2}+1-1)$

$(f\circ g)(x)=2\ln\sqrt{x-2}=2\ln(x-2)^{\frac{1}{2}}=$

$2\frac{1}{2}\ln(x-2).$

άρα $\boxed{(f\circ g)(x)=\ln(x-2)\ ,\ \text{για } x>2}$

Β2 Έχω $h(x)=\ln(x-2),\ x>2$

$h'(x)=(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}>0\quad \forall x>2$

Έτσι $h\nearrow$ άρα h 1-1 επομένως υπάρχει h^{-1}

$$D_{h^{-1}} = \Sigma T_h = h\left((2,+\infty)\right) \overset{h\nearrow}{=\!=} \left(\lim_{x\to 2^+} h(x), \lim_{x\to +\infty} h(x)\right) = \boxed{\mathbb{R}}$$

<u>αφού</u>

- $\lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) \xrightarrow[u_0=0]{u=x-2} \lim_{u\to 0} \ln u = -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \ln(x-2) \xrightarrow[u_0=+\infty]{u=x-2} \lim_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$

Ισχύει $\quad h(x) = y \iff x = h^{-1}(y)$

Έτσι, $\quad h(x) = y$, με $y\in\mathbb{R}$

$$\ln(x-2) = y$$

$$x-2 = e^y$$

$$x = e^y + 2, \quad y\in\mathbb{R}$$

Επομένως $\boxed{h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x\in\mathbb{R}}$

B3)

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to 2}\left(h(x)\,\frac{f(x)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2} h(x) \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = (-\infty)\cdot 2 = \boxed{-\infty}$$

ΘΕΜΑ Γ

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2+1}$

Γ1

→ Αφού f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

πρέπει $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

Αν $\kappa \neq 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\kappa x^3}{x^2} = \kappa(+\infty) = \pm\infty \notin \mathbb{R}$ άτοπο

πρέπει $\boxed{\kappa = 0}$ έτσι $f(x) = \dfrac{\mu x}{x^2+1}$

Έχουμε $f'(x) = \left(\dfrac{\mu x}{x^2+1}\right)' = \dfrac{\mu(x^2+1) - \mu x(2x)}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2+1)^2}$

→ Αφού $y = x$ εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$

πρέπει

• $f'(0) = 1 \Rightarrow \dfrac{\mu}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{\mu = 1}$

Γ2) Έχουμε $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

i) $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-x\,2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0 \iff 1-x^2=0 \iff x=\pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

• $x\in(-\infty,-1]$ και $x\in[1,+\infty)$ $f \searrow$

$x\in[-1,1]$ $f \nearrow$

• στο $x_1=-1$ η ελάχιστο $f(-1)=-\frac{1}{2}$

στο $x_2=1$ η μέγιστο $f(1)=\frac{1}{2}$

ii) Έστω $\Delta_1=(-\infty,-1]$, $\Delta_2=(-1,1]$, $\Delta_3=(1,+\infty)$

• $f(\Delta_1)=f((-\infty,-1])\overset{f\searrow}{=}[f(-1),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x))=[-\frac{1}{2},0)$

$f(\Delta_2)=f((-1,1])\overset{f\nearrow}{=}(\lim\limits_{x\to-1^+}f(x),f(1)]=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$f(\Delta_3)=f(1,+\infty)\overset{f\searrow}{=}(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1^+}f(x))=(0,\frac{1}{2})$

Άρα Σ.Τ.f $= f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

iii) Εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

αφού $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

- $\alpha^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΡΙΖΑ στο Δ_1.

- $\alpha^2 + \frac{1}{2} \in f(\Delta_2)$ (για $\alpha = 0$) άρα η εξίσωση έχει 1 μόνο ρίζα στο Δ_2 την $x = 1$ (αφού $f \nearrow$ στο Δ_2)

- $\alpha^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_3)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ ΕΧΕΙ ρίζα στο Δ_3

Επομένως η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ ΕΧΕΙ 1 ΜΟΝΟ ρίζα την $x = 1$.

Γ3) $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx$

i) $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{x^2+1}}\,dx$

$$\int_0^1 x^{2\nu+1}dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} - 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}} \quad (1)$$

ii) • $I_0 \overset{\nu=0}{=\!=} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx \;\underset{du=2xdx}{\overset{u=x^2+1}{=\!=\!=}}\; \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}}{u}du$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|u|\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$$

• $(1) \xrightarrow{\nu=0} I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\ln 2 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\boxed{I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}}$$

• $(1) \xrightarrow{\nu=1} I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1-\ln 2}{2} \Rightarrow$$

$$I_2 = \frac{1-2+2\ln 2}{4}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{2\ln 2 - 1}{4}}$$

ΘΕΜΑ Δ

g παραγωγίσιμη g' συνεχής

$0 < g(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g'(x) \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Δ1 Θεωρώ $h(x) = g(x) + x$

η h συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών

$\left.\begin{array}{l} h(-1) = g(-1) - 1 < 0 \\ h(0) = g(0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(-1)\,h(0) < 0$

Από Θ. Bolzano $\exists\, x_1 \in (-1, 0)$ $h(x_1) = 0 \Rightarrow$

$g(x_1) + x_1 = 0$

(*) $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και συνεχής

Άρα η h' διατηρεί πρόσημο

Άρα η h γνησίως μονότονη,

Επομένως η ρίζα είναι μοναδική

Δ2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \left(x \cdot (g(x) + x)\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\eta\mu + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[2\left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} - \kappa\right)\right] =$$

$$= 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

Άρα $3 - \kappa = 0 \Rightarrow \kappa = 3$.

Δ3 $\quad f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2})$

(i) $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$

$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x\,(\sigma\upsilon\nu x - 1) + (1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$= \frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(-2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$= \frac{-2\overset{+}{(1-\sigma\upsilon\nu x)}\,\overset{-}{(\sigma\upsilon\nu x - 2)}\,\overset{+}{(\sigma\upsilon\nu x + 1)}}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0$

$\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

f συνεχής στο 0

οπότε $f \nearrow$ στο $[0, \frac{\pi}{2})$ $\Rightarrow$

για $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$

(ii) $f([0, \frac{\pi}{2})) \underset{\text{συνεχ.}}{\overset{\nearrow}{=}} [f(0), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x))$

$= [0, +\infty)$

Το $\frac{\pi}{3} \in f([0, \frac{\pi}{2}))$

Άρα $\exists\, x_2 \in (0, \frac{\pi}{2}) : f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ μοναδικό

αφού $f \nearrow$

Δ4 (i) Θεωρώ $h(x) = g(x) + x$

Τότε $h(0) = g(0) > 0$

$h(x_1) = g(x_1) + x_1 = 0$

και $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και άρα h' συνεχής

Άρα η $h'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο

Αν $h'(x) < 0 \Rightarrow h \downarrow$ οπότε

έχω $x_1 < 0 \overset{h\downarrow}{\Rightarrow} h(x_1) > h(0) = g(0) > 0 \Rightarrow$

$0 > 0$ άτοπο

Άρα $h'(x) > 0 \Rightarrow h \uparrow$ οπότε

για $x \in [x_1, 0]$ έχω $x \geq x_1 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow}$

$h(x) \geq h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x) + x \geq 0$

και αφού $x^2 \geq 0$ έχω

$x^2(g(x) + x) \geq 0$ στο $[x_1, 0] \Rightarrow$

$f(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$

Δ4 (ii)

Έχω $E(0) = \int_{x_1}^{f(x_2)} |f(x)|\,dx$

με $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ και $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [x_1, \frac{\pi}{3}]$

Άρα $E(0) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$

και ισχύει $\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ ①

Έχω $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \left[x^3 g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)\,dx$

$= -x_1^3 g(x_1) - \int_{x_1}^{0} 3\,(f(x) - x^3)\,dx =$

$= x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{0} 3x^3\,dx$

$= x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx + 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0}$

$= x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx - 3\,\frac{x_1^4}{4}$

$= \frac{x_1^4}{4} - 3\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx \overset{①}{=}$

$\frac{x_1^4}{4} - 3\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$

Έχω $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx$

$= \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= -2\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2$

$= 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$

Άρα $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} - 3\left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}\right)$

$= \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$