

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σελ. 65 σχολικού βιβλίου

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1, \text{ αφού}$$

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \dots + \frac{v_k}{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{v} = \frac{v}{v} = 1.$$

A2. Ορισμός σελ. 87 σχολικού βιβλίου:

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημίθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

A3. Ορισμός σελ. 27 σχολικού βιβλίου:

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος (derivative) της f και συμβολίζεται με f' .

- A4.**
- α. Λ
 - β. Σ
 - γ. Σ
 - δ. Λ
 - ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 1 \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x - 3$

B2. Θέτουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -1$

| | | | | |
|------|------------|------------|------------|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 3 | $+\infty$ |
| f' | $+$ | \circ | \circ | $+$ |
| f | \nearrow | \searrow | \nearrow | |

T.M. T.E.

Η f είναι γν. αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, -1]$, $A_3 = [3, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $A_2 = [-1, 3]$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -1$, το

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1 = \frac{8}{3}$$

και τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 3$, το

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = \frac{27}{3} - 9 - 9 + 1 = -8$$

B3. Έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$, (1) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Έχουμε $\lambda = f'(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$ και $y = f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$,

συνεπώς η σχέση (1) δίνει $1 = -3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$

Άρα $(\varepsilon): y = -3x + 1$

B4.
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = -4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $\bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7} = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{23+\kappa}{7} = 4 \Leftrightarrow 23+\kappa = 28 \Leftrightarrow \kappa = 5$$

Για $\kappa = 5$: $4, 5, 4, 5, 0, 3, 7 \xrightarrow{\text{αύξουσα σειρά}}$

$0, 3, 4, 4, 5, 5, 7,$

$= = = = = = =$

$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7$

Γ2. Έχουμε $n = 7$ (περιττός), άρα $\delta = x_{\frac{7+1}{2}} = x_{\frac{8}{2}} = x_4 = 4$

$$\begin{aligned} \Gamma 3. \quad S^2 &= \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2}{7} = \frac{(0-4)^2 + (3-4)^2 + \cancel{(4-4)^2} + \cancel{(4-4)^2} + (5-4)^2 + (5-4)^2}{7} \\ &= \frac{16+1+1+1+9}{7} = \frac{28}{7} = 4 \end{aligned}$$

Γ4. Υπολογίσαμε $s_2 = 4 \xrightarrow{s>0} s = 2$.

Άρα $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$ ή $50\% > 10\%$, άρα, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές,

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Έχουμε $E = 100 \Leftrightarrow x \cdot y = 100 \Leftrightarrow x, y > 0$

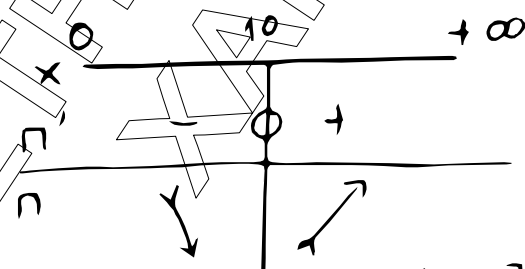
$y = \frac{100}{x}$ ①

Συνεπώς, $\pi = 2x + 2y \Rightarrow \pi(x) = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}, x > 0$

Δ2 $\pi'(x) = \left(2x + \frac{200}{x}\right)' = 2 - \frac{200 \cdot 1}{x^2} = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 100)}{x^2}, x > 0$

Θέτουμε $\pi'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x > 0$

$x = 10$



Αρα, π γν φθίνουσα στο $A_1 = (0, 10]$, γν αύξουσα στο $A_2 = [10, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 10$, εν $\pi_{\min}(10) = 2 \cdot 10 + \frac{200}{10} = 40$ cm

οταν $x=10$ και $y = \frac{100}{10} = 10$, δηλαδή οταν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο η πλευρά 10 cm.

$\Delta 3$. $x_1 < x_2 \Rightarrow \pi(x_1) > \pi(x_2) \Leftrightarrow \pi(x_1) - \pi(x_2) > 0$.
Επιπλέον, $x_1 - x_2 < 0$, ορα $A = \frac{\pi(x_1) - \pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

$\Delta 4$ $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x^2 - 100)}{x^2(\sqrt{10x} - 10)} =$

$= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x^2 - 100)}{x^2(\sqrt{10x} - 10)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x+10)(x-10)(\sqrt{10x}+10)}{x^2(\sqrt{10x}-10)(\sqrt{10x}+10)}$

$= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x+10)(x-10)(\sqrt{10x}+10)}{x^2(\sqrt{10x}^2 - 10^2)} =$

$= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x+10)(x-10)(\sqrt{10x}+10)}{x^2(10x - 100)} =$

$= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x+10)(x-10)^2(\sqrt{10x}+10)}{10x^2(x-10)} =$

$= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{10x^2} = \frac{2 \cdot (10+10) \cdot (\sqrt{10 \cdot 10} + 10)}{10 \cdot 10^2} = \frac{40 \cdot 20}{1000}$